Symmetriegruppen idealer MHD-Gleichungen

Fuchs, J. Christoph

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 40, 1988, S.29-38

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Symmetriegruppen idealer MHD-Gleichungen

Von **J. Christoph Fuchs,** Braunschweig

Vorgelegt von Egon Richter

(Eingegangen am 11.6.1988)

Zusammenfassung

Für die nichtlinearen, nichtstationären Gleichungen idealer kompressibler magnetohydrodynamischer Strömungen wird die Lie-Algebra der infinitesimalen Symmetrien berechnet. Mit Hilfe dieser Lie-Algebra werden einparametrige lokale Symmetriegruppen der betrachteten MHD-Gleichungen berechnet.

Es werden zwei- und dreidimensionale Strömungen untersucht. Die Ergebnisse werden mit den Ergebnissen für eine zweidimensionale Strömung mit senkrechtem Magnetfeld verglichen. Außerdem wird untersucht, welchen Einfluß ein von außen vorgebbares ortsabhängiges Magnetfeld auf die Lie-Algebra und die Symmetriegruppen hat.

1. Einleitung

Die magnetohydrodynamischen (MHD) Gleichungen sind ein vereinfachtes System der Einflüssigkeitsgleichungen und Maxwellgleichungen für niedrigfrequente Vorgänge in Plasmen mit großem räumlichen Maßstab [1]. Wenn dissipative Effekte vernachlässigt werden können, spricht man von idealer MHD.

In dieser Arbeit werden die Lie-Symmetriegruppen der kompressiblen nichtstationären idealen MHD-Gleichungen für den Fall einer ebenen (zweidimensionalen) isentropen Strömung und im Fall einer beliebigen (dreidimensionalen) isentropen Strömung berechnet. Des weiteren wird der Einfluß eines von außen beliebig vorgebbaren, ortsabhängigen Magnetfeldes auf die Symmetriegruppen untersucht.

Die Ähnlichkeitsanalyse zur Untersuchung partieller Differentialgleichungen ist in der Literatur hinreichend beschrieben [2,3,4], daher wird auf das bekannte Verfahren nicht weiter eingegangen. Lie-Symmetriegruppen können verwendet werden, um ein partielles Differentialgleichungssystem auf ein neues Differentialgleichungssystem mit weniger unabhängigen Variablen zu reduzieren. Die Lösungen dieses Systems werden Ähnlichkeitslösungen genannt.

Lie-Gruppen wurden bei der Behandlung von nichtstationären MHD-Gleichungen angewendet, um inkompressible Flüssigkeiten [5], kompressible eindimensionale Plasmen [6] und kompressible zweidimensionale Plasmen mit senkrecht zur Plasmaströmung stehendem Magnetfeld [7] zu untersuchen.

2. Symmetriegruppen für eine ebene Plasmaströmung

Die nichtstationären idealen MHD-Gleichungen lauten für eine kompressible isentrope Plasmaströmung in dimensionslosen Größen

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \boldsymbol{v}) = 0, \\
&\varrho \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v} \right) + \nabla \left(p + \frac{1}{2} R_H \boldsymbol{H}^2 \right) - R_H (\boldsymbol{H} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{H} = 0, \\
&\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}) = 0, \\
&\frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \\
&\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

dabei ist $\boldsymbol{v}$ die Strömungsgeschwindigkeit, $\boldsymbol{H}$ das Magnetfeld, ϱ die Massendichte, p der Druck, γ der adiabatische Exponent und $R_H = \mu_0 H_0^2 / \varrho_0 U_0^2$ die magnetische Druckzahl (mit der magnetischen Permeabilitätskonstanten μ_0 und typischen Werten für Magnetfeld, Massendichte und Strömungsgeschwindigkeit H_0, ϱ_0, U_0).

Wenn ein äußeres Magnetfeld vorgegeben wird, ist in den Gleichungen (1) $\boldsymbol{H}$ durch $\boldsymbol{H}_{in} + \boldsymbol{H}_{ex}$ zu ersetzen, dabei ist $\boldsymbol{H}_{in}$ das von der Plasmaströmung erzeugte Feld und $\boldsymbol{H}_{ex}$ das von außen angelegte Feld, das durch die Strömung nicht beeinflußt wird.

Seien x, y, z kartesische Koordinaten und $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ die entsprechenden Einheitsvektoren. Um eine ebene Strömung mit äußerem Magnetfeld und beliebig orientiertem internen Magnetfeld zu beschreiben, sei $\boldsymbol{v} = v^x(x,y,t)\boldsymbol{e}_x + v^y(x,y,t)\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{H}_{in} = h^x(x,y,t)\boldsymbol{e}_x + h^y(x,y,t)\boldsymbol{e}_y + h^z(x,y,t)\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{H}_{ex} = H^x(x,y)\boldsymbol{e}_x + H^y(x,y)\boldsymbol{e}_y + H^z(x,y)\boldsymbol{e}_z$, $\varrho = \varrho(x,y,t)$ und $p = p(x,y,t)$. Die Gleichungen (1) bilden dann ein nichtlineares partielles Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit neun Gleichungen, drei unabhängigen und sieben abhängigen Variablen.

Es werden für $x, y, t, v^x, v^y, h^x, h^y, h^z, \varrho$ und p infinitesimale Transformationen der Gestalt

$$\begin{aligned}
&\tilde{x} = x + \varepsilon \xi^x(x,y,t,v^x,v^y,h^x,h^y,h^z,\varrho,p) + O(\varepsilon^2), \\
&\text{(analoge Transformationen für } y, t\text{)}, \\
&\widetilde{v^x} = v^x + \varepsilon \eta^{v^x}(x,y,t,v^x,v^y,h^x,h^y,h^z,\varrho,p) + O(\varepsilon^2), \\
&\text{(analoge Transformationen für } v^y, h^x, h^y, h^z, \varrho, p\text{)}
\end{aligned} \tag{2}$$

gesucht, die (1) invariant lassen.

Die bestimmenden Gleichungen für die infinitesimalen Elemente $\xi^x, \xi^y, \xi^t, \eta^{v^x}, \eta^{v^y}, \eta^{h^x}, \eta^{h^y}, \eta^{h^z}, \eta^{\varrho}$ und η^p erhält man aus dem z.B. in [2] beschriebenen Verfahren. Es ergibt sich ein lineares homogenes partielles Differentialgleichungssystem für die infinitesimalen Elemente mit 577 Gleichungen.

Die Lösung dieser bestimmenden Gleichungen enthält 9 freie Konstante $C_1, \dots, C_9$ im Fall $\gamma \neq 2$ und im Fall $\gamma = 2$ eine zusätzliche Konstante C_{11} (Die Numerierung der Konstanten entspricht der Numerierung der Konstanten der infinitesimalen Elemente für eine ebene Strömung mit senkrechtem Magnetfeld [7], so daß die Ergebnisse leicht verglichen werden können.):

$$
\begin{aligned}
\xi^x &= C_1 + C_4 t + C_6 y + C_7 x,\\
\xi^y &= C_2 + C_5 t - C_6 x + C_7 y,\\
\xi^t &= C_3 + C_8 t,\\
\eta^{v^x} &= C_4 + C_6 v^y + (C_7 - C_8) v^x,\\
\eta^{v^y} &= C_5 - C_6 v^x + (C_7 - C_8) v^y,\\
\eta^{h^x} &= C_9 (h^x + H^x) + C_6 (h^y + H^y) - \xi^x \frac{\partial H^x}{\partial x} - \xi^y \frac{\partial H^x}{\partial y},\\
\eta^{h^y} &= C_9 (h^y + H^y) - C_6 (h^x + H^x) - \xi^x \frac{\partial H^y}{\partial x} - \xi^y \frac{\partial H^y}{\partial y},\\
\eta^{h^z} &= (C_9 - C_{11}) (h^z + H^z) - \xi^x \frac{\partial H^z}{\partial x} - \xi^y \frac{\partial H^z}{\partial y},\\
\eta^{\varrho} &= 2 (C_9 + C_8 - C_7) \varrho,\\
\eta^{p} &= 2 C_9 p + R_H C_{11} (h^z + H^z)^2,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

dabei ist $C_{11} \neq 0$ nur möglich, wenn $\gamma \approx 2$ gilt.

Die Menge der infinitesimalen Generatoren

$$
\begin{aligned}
Z = {} & \xi^x \frac{\partial}{\partial x} + \xi^y \frac{\partial}{\partial y} + \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \eta^{v^x} \frac{\partial}{\partial v^x} + \eta^{v^y} \frac{\partial}{\partial v^y} + \eta^{h^x} \frac{\partial}{\partial h^x} + \eta^{h^y} \frac{\partial}{\partial h^y} + \\
& + \eta^{h^z} \frac{\partial}{\partial h^z} + \eta^{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \eta^{p} \frac{\partial}{\partial p}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

mit den infinitesimalen Elementen (3) bildet eine Lie-Algebra mit dem Kommutator $[Z_\alpha, Z_\beta] = Z_\alpha Z_\beta - Z_\beta Z_\alpha$. Eine Basis dieser Lie-Algebra erhält man, wenn man in (4) jeweils einen der Parameter $C_1, \dots, C_9, C_{11}$ zu 1 und die anderen zu 0 setzt:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial H^x}{\partial x} \frac{\partial}{\partial h^x} - \frac{\partial H^y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial h^y} - \frac{\partial H^z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial h^z},\\
X_2 &= \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial H^x}{\partial y} \frac{\partial}{\partial h^x} - \frac{\partial H^y}{\partial y} \frac{\partial}{\partial h^y} - \frac{\partial H^z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial h^z},\\
X_3 &= \frac{\partial}{\partial t},\\
X_4 &= t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v^x} - t \frac{\partial H^x}{\partial x} \frac{\partial}{\partial h^x} - t \frac{\partial H^y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial h^y} - t \frac{\partial H^z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial h^z},\\
X_5 &= t \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v^y} - t \frac{\partial H^x}{\partial y} \frac{\partial}{\partial h^x} - t \frac{\partial H^y}{\partial y} \frac{\partial}{\partial h^y} - t \frac{\partial H^z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial h^z},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} X_6 = {} & y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + v^y\frac{\partial}{\partial v^x} - v^x\frac{\partial}{\partial v^y} + (h^y + H^y - y\frac{\partial H^x}{\partial x} + x\frac{\partial H^x}{\partial y})\frac{\partial}{\partial h^x} \\ & - (h^x + H^x + y\frac{\partial H^y}{\partial x} - x\frac{\partial H^y}{\partial y})\frac{\partial}{\partial h^y} + (-y\frac{\partial H^z}{\partial x} + x\frac{\partial H^z}{\partial y})\frac{\partial}{\partial h^z}, \\ X_7 = {} & x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + v^x\frac{\partial}{\partial v^x} + v^y\frac{\partial}{\partial v^y} - 2\varrho\frac{\partial}{\partial \varrho} \\ & - (x\frac{\partial H^x}{\partial x} + y\frac{\partial H^x}{\partial y})\frac{\partial}{\partial h^x} - (x\frac{\partial H^y}{\partial x} + y\frac{\partial H^y}{\partial y})\frac{\partial}{\partial h^y} \\ & - (x\frac{\partial H^z}{\partial x} + y\frac{\partial H^z}{\partial y})\frac{\partial}{\partial h^z}, \\ X_8 = {} & t\frac{\partial}{\partial t} - v^x\frac{\partial}{\partial v^x} - v^y\frac{\partial}{\partial v^y} + 2\varrho\frac{\partial}{\partial \varrho}, \\ X_9 = {} & (h^x + H^x)\frac{\partial}{\partial h^x} + (h^y + H^y)\frac{\partial}{\partial h^y} + (h^z + H^z)\frac{\partial}{\partial h^z} + 2\varrho\frac{\partial}{\partial \varrho} + 2p\frac{\partial}{\partial p}, \\ X_{11} = {} & -(h^z + H^z)\frac{\partial}{\partial h^z} + R_H(h^z + H^z)^2\frac{\partial}{\partial p}. \end{aligned} \tag{5}$$

Im Fall $\gamma \neq 2$ bilden $X_1, \ldots, X_9$ eine Basis, während für $\gamma = 2$ der Vektor X_{11} hinzugefügt werden muß.

Die infinitesimalen Elemente und die Lie-Algebra für eine ebene Strömung ohne äußeres Magnetfeld erhält man aus den entsprechenden Ergebnissen (3), (5) für die ebene Strömung mit äußerem Magnetfeld, indem man in (3), (5) das äußere Magnetfeld $\boldsymbol{H}_{ex} = 0$ setzt. Dies ist jedoch keine triviale Aussage. Wenn man zwei Differentialgleichungssysteme hat, von denen eines ein Spezialfall des anderen ist, ist es im allgemeinen nicht möglich, die infinitesimalen Elemente oder die Lie-Algebra des einen Systems aus dem anderen zu erhalten: Für die ebene Strömung ohne äußeres Magnetfeld, aber mit beliebig orientiertem internen Magnetfeld ergab sich eine 10-dimensionale Lie-Algebra, während für den Spezialfall der ebenen Strömung mit einem senkrechten internen Magnetfeld [7] die entsprechende Lie-Algebra unendlich-dimensional ist. Ebenso läßt sich die Lie-Algebra der zweidimensionalen Strömung nicht aus der der dreidimensionalen Strömung (siehe Abschnitt **3**) herleiten.

Die lokalen einparametrigen Transformationsgruppen erhält man, wenn man folgendes gewöhnliche Differentialgleichungssystem löst:

$$\begin{aligned} & \frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon} = \xi^x(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}, \widetilde{v^x}, \widetilde{v^y}, \widetilde{h^x}, \widetilde{h^y}, \widetilde{h^z}, \tilde{\varrho}, \tilde{p}), \qquad \tilde{x}(\varepsilon = 0) = x, \\ & \quad \text{(analoge Gleichungen für } \tilde{y}, \tilde{t}\text{)}, \\ & \frac{d\widetilde{v^x}}{d\varepsilon} = \eta^{v^x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}, \widetilde{v^x}, \widetilde{v^y}, \widetilde{h^x}, \widetilde{h^y}, \widetilde{h^z}, \tilde{\varrho}, \tilde{p}), \qquad \widetilde{v^x}(\varepsilon = 0) = v^x, \\ & \quad \text{(analoge Gleichungen für } \widetilde{v^y}, \widetilde{h^x}, \widetilde{h^y}, \widetilde{h^z}, \tilde{\varrho}, \tilde{p}\text{)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Im folgenden werden die lokalen einparametrigen Transformationsgruppen, die zu den Basisvektoren (5) der Lie-Algebra gehören, angegeben. Dabei werden nur diejenigen Variablen, die sich bei der Transformation ändern, erwähnt:

$C_1 \neq 0$: $\tilde{x} = x + \varepsilon C_1$, $\tilde{h}^x = h^x + H^x(x,y) - H^x(x+\varepsilon C_1, y)$,
$\tilde{h}^y = h^y + H^y(x,y) - H^y(x+\varepsilon C_1, y)$,
$\tilde{h}^z = h^z + H^z(x,y) - H^z(x+\varepsilon C_1, y)$
(Translation in x-Richtung für $\boldsymbol{H}_{ex} = 0$).

Für $C_2 \neq 0$ ergibt sich eine analoge Transformation (Translation in y-Richtung für $\boldsymbol{H}_{ex} = 0$).

$C_3 \neq 0$: $\tilde{t} = t + \varepsilon C_3$ (Zeitverschiebung)

$C_4 \neq 0$: $\tilde{x} = x + \varepsilon C_4 t$, $\tilde{h}^x = h^x + H^x(x,y) - H^x(x+\varepsilon C_4 t, y)$,
$\tilde{v}^x = v^x + \varepsilon C_4$, $\tilde{h}^y = h^y + H^y(x,y) - H^y(x+\varepsilon C_4 t, y)$,
$\tilde{h}^z = h^z + H^z(x,y) - H^z(x+\varepsilon C_4 t, y)$
(Galilei-boost für $\boldsymbol{H}_{ex} = 0$).

Für $C_5 \neq 0$ ergibt sich eine analoge Transformation.

$C_6 \neq 0$: $\tilde{x} = y\sin(C_6\varepsilon) + x\cos(C_6\varepsilon)$, $\tilde{y} = y\cos(C_6\varepsilon) - x\sin(C_6\varepsilon)$,
$\tilde{v}^x = v^y\sin(C_6\varepsilon) + v^x\cos(C_6\varepsilon)$, $\tilde{v}^y = v^y\cos(C_6\varepsilon) - v^x\sin(C_6\varepsilon)$,

$$\tilde{h}^x = (h^x + H^x(x,y))\cos(C_6\varepsilon) + (h^y + H^y(x,y))\sin(C_6\varepsilon) - \\ - H^x(x\cos(C_6\varepsilon) + y\sin(C_6\varepsilon), -x\sin(C_6\varepsilon) + y\cos(C_6\varepsilon)),$$
$$\tilde{h}^y = (h^y + H^y(x,y))\cos(C_6\varepsilon) - (h^x + H^x(x,y))\sin(C_6\varepsilon) - \\ - H^y(x\cos(C_6\varepsilon) + y\sin(C_6\varepsilon), -x\sin(C_6\varepsilon) + y\cos(C_6\varepsilon)),$$
$$\tilde{h}^z = h^z + H^z(x,y) - H^z(x\cos(C_6\varepsilon) + y\sin(C_6\varepsilon), -x\sin(C_6\varepsilon) + y\cos(C_6\varepsilon))$$
(Rotation für $\boldsymbol{H}_{ex} = 0$).

$C_7 \neq 0$: $\tilde{x} = x e^{C_7\varepsilon}$, $\tilde{y} = y e^{C_7\varepsilon}$,
$\tilde{v}^x = v^x e^{C_7\varepsilon}$, $\tilde{v}^y = v^y e^{C_7\varepsilon}$, $\tilde{\varrho} = \varrho e^{-2C_7\varepsilon}$,
$\tilde{h}^x = h^x + H^x(x,y) - H^x(x e^{C_7\varepsilon}, y e^{C_7\varepsilon})$,
$\tilde{h}^y = h^y + H^y(x,y) - H^y(x e^{C_7\varepsilon}, y e^{C_7\varepsilon})$,
$\tilde{h}^z = h^z + H^z(x,y) - H^z(x e^{C_7\varepsilon}, y e^{C_7\varepsilon})$
(Streckung für x, y, v^x, v^y, ϱ).

$C_8 \neq 0$: $\tilde{t} = t e^{C_8\varepsilon}$, $\tilde{v}^x = v^x e^{-C_8\varepsilon}$, $\tilde{v}^y = v^y e^{-C_8\varepsilon}$, $\tilde{\varrho} = \varrho e^{2C_8\varepsilon}$
(Streckung für t, v^x, v^y, ϱ).

$C_9 \neq 0$: $\tilde{h}^x = -H^x(x,y) + (h^x + H^x(x,y))\,e^{C_9\varepsilon}$,
$\tilde{h}^y = -H^y(x,y) + (h^y + H^y(x,y))\,e^{C_9\varepsilon}$,
$\tilde{h}^z = -H^z(x,y) + (h^z + H^z(x,y))\,e^{C_9\varepsilon}$,
$\tilde{p} = p e^{2C_9\varepsilon}$, $\tilde{\varrho} = \varrho e^{2C_9\varepsilon}$
(Streckung für $h^x + H^x, h^y + H^y, h^z + H^z, p, \varrho$).

Die folgende Transformation ist nur im Fall $\gamma = 2$ möglich:

$C_{11} \neq 0$: $\tilde{h}^z = -H^z(x,y) + (h^z + H^z(x,y))\,e^{-C_{11}\varepsilon}$,

$$\tilde{p} = p - \frac{1}{2} R_H (h^z + H^z(x,y))^2 (e^{-2C_{11}\varepsilon} - 1).$$

3. Dreidimensionale Plasmaströmung

Damit die Gleichungen (1) eine dreidimensionale Plasmaströmung beschreiben, sei $\boldsymbol{v} = v^x(x,y,z,t)\boldsymbol{e}_x + v^y(x,y,z,t)\boldsymbol{e}_y + v^z(x,y,z,t)\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{H}_{in} = h^x(x,y,z,t)\boldsymbol{e}_x + h^y(x,y,z,t)\boldsymbol{e}_y + h^z(x,y,z,t)\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{H}_{ex} = H^x(x,y,z)\boldsymbol{e}_x + H^y(x,y,z)\boldsymbol{e}_y + H^z(x,y,z)\boldsymbol{e}_z$, $\varrho = \varrho(x,y,z,t)$ und $p = p(x,y,z,t)$. Die Gleichungen (1) bilden dann ein nichtlineares partielles Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit neun Gleichungen, vier unabhängigen und acht abhängigen Variablen.

Es werden wieder infinitesimale Transformationen für die abhängigen und die unabhängigen Variablen ähnlich (2) gesucht, die (1) invariant lassen. Die infinitesimalen Elemente sind jetzt $\xi^x, \xi^y, \xi^z, \xi^t, \eta^{v^x}, \eta^{v^y}, \eta^{v^z}, \eta^{h^x}, \eta^{h^y}, \eta^{h^z}, \eta^\varrho, \eta^p$, sie hängen von $x, y, z, t, v^x, v^y, v^z, h^x, h^y, h^z, \varrho$ und p ab.

Die bestimmenden Gleichungen für die infinitesimalen Elemente bilden ein lineares homogenes partielles Differentialgleichungssystem mit 1703 Gleichungen. Die Lösung dieses Systems enthält 13 freie Konstanten $C_1,\ldots,C_{13}$, ein bestimmter Wert für γ braucht nicht berücksichtigt zu werden:

$$
\begin{aligned}
\xi^x &= C_1 + C_5 t + C_8 x + C_9 y + C_{10} z,\\
\xi^y &= C_2 + C_6 t + C_8 y - C_9 x + C_{11} z,\\
\xi^z &= C_3 + C_7 t + C_8 z - C_{10} x - C_{11} y,\\
\xi^t &= C_4 + C_{12} t,\\
\eta^{v^x} &= C_5 + (C_8 - C_{12})\, v^x + C_9 v^y + C_{10} v^z,\\
\eta^{v^y} &= C_6 + (C_8 - C_{12})\, v^y - C_9 v^x + C_{11} v^z,\\
\eta^{v^z} &= C_7 + (C_8 - C_{12})\, v^z - C_{10} v^x - C_{11} v^y,\\
\eta^{h^x} &= C_{13}(h^x + H^x) + C_9 (h^y + H^y) + C_{10}(h^z + H^z) - \xi^x \frac{\partial H^x}{\partial x} - \xi^y \frac{\partial H^x}{\partial y} - \xi^z \frac{\partial H^x}{\partial z},\\
\eta^{h^y} &= C_{13}(h^y + H^y) - C_9 (h^x + H^x) + C_{11}(h^z + H^z) - \xi^x \frac{\partial H^y}{\partial x} - \xi^y \frac{\partial H^y}{\partial y} - \xi^z \frac{\partial H^y}{\partial z},\\
\eta^{h^z} &= C_{13}(h^z + H^z) - C_{10}(h^x + H^x) - C_{11}(h^y + H^y) - \xi^x \frac{\partial H^z}{\partial x} - \xi^y \frac{\partial H^z}{\partial y} - \xi^z \frac{\partial H^z}{\partial z},\\
\eta^\varrho &= 2\,(C_{13} + C_{12} - C_8)\,\varrho,\\
\eta^p &= 2 C_{13} p.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Die infinitesimalen Elemente für die dreidimensionale Strömung ohne äußeres Magnetfeld erhält man aus (7), indem man $\boldsymbol{H}_{ex} = 0$ setzt. Dies ist aber nicht selbstverständlich, wie im vorigen Abschnitt für die ebene Strömung erläutert wurde.

Die Menge der infinitesimalen Generatoren bildet eine 13-dimensionale Lie-Algebra. Eine Basis dieser Lie-Algebra ist

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial H^x}{\partial x}\frac{\partial}{\partial h^x} - \frac{\partial H^y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial h^y} - \frac{\partial H^z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial h^z},$$

$$
\begin{aligned}
X_2 &= \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial H^x}{\partial y}\frac{\partial}{\partial h^x} - \frac{\partial H^y}{\partial y}\frac{\partial}{\partial h^y} - \frac{\partial H^z}{\partial y}\frac{\partial}{\partial h^z},\\
X_3 &= \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial H^x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial h^x} - \frac{\partial H^y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial h^y} - \frac{\partial H^z}{\partial z}\frac{\partial}{\partial h^z},\\
X_4 &= \frac{\partial}{\partial t},\\
X_5 &= t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v^x} - t\frac{\partial H^x}{\partial x}\frac{\partial}{\partial h^x} - t\frac{\partial H^y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial h^y} - t\frac{\partial H^z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial h^z},\\
X_6 &= t\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v^y} - t\frac{\partial H^x}{\partial y}\frac{\partial}{\partial h^x} - t\frac{\partial H^y}{\partial y}\frac{\partial}{\partial h^y} - t\frac{\partial H^z}{\partial y}\frac{\partial}{\partial h^z},\\
X_7 &= t\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial v^z} - t\frac{\partial H^x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial h^x} - t\frac{\partial H^y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial h^y} - t\frac{\partial H^z}{\partial z}\frac{\partial}{\partial h^z},\\
X_8 &= x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + v^x\frac{\partial}{\partial v^x} + v^y\frac{\partial}{\partial v^y} + v^z\frac{\partial}{\partial v^z} - 2\varrho\frac{\partial}{\partial \varrho}\\
&\quad - \Big(x\frac{\partial H^x}{\partial x} + y\frac{\partial H^x}{\partial y} + z\frac{\partial H^x}{\partial z}\Big)\frac{\partial}{\partial h^x} - \Big(x\frac{\partial H^y}{\partial x} + y\frac{\partial H^y}{\partial y} + z\frac{\partial H^y}{\partial z}\Big)\frac{\partial}{\partial h^y}\\
&\quad - \Big(x\frac{\partial H^z}{\partial x} + y\frac{\partial H^z}{\partial y} + z\frac{\partial H^z}{\partial z}\Big)\frac{\partial}{\partial h^z},\\
X_9 &= y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + v^y\frac{\partial}{\partial v^x} - v^x\frac{\partial}{\partial v^y} + \Big(h^y + H^y - y\frac{\partial H^x}{\partial x} + x\frac{\partial H^x}{\partial y}\Big)\frac{\partial}{\partial h^x}\\
&\quad - \Big(h^x + H^x + y\frac{\partial H^y}{\partial x} - x\frac{\partial H^y}{\partial y}\Big)\frac{\partial}{\partial h^y} - \Big(y\frac{\partial H^z}{\partial x} - x\frac{\partial H^z}{\partial y}\Big)\frac{\partial}{\partial h^z},\\
X_{10} &= z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} + v^z\frac{\partial}{\partial v^x} - v^x\frac{\partial}{\partial v^z} + \Big(h^z + H^z - z\frac{\partial H^x}{\partial x} + x\frac{\partial H^x}{\partial z}\Big)\frac{\partial}{\partial h^x}\\
&\quad - \Big(z\frac{\partial H^y}{\partial x} - x\frac{\partial H^y}{\partial z}\Big)\frac{\partial}{\partial h^y} - \Big(h^x + H^x - x\frac{\partial H^z}{\partial z} + z\frac{\partial H^z}{\partial x}\Big)\frac{\partial}{\partial h^z},\\
X_{11} &= z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} + v^z\frac{\partial}{\partial v^y} - v^y\frac{\partial}{\partial v^z} - \Big(z\frac{\partial H^x}{\partial y} - y\frac{\partial H^x}{\partial z}\Big)\frac{\partial}{\partial h^x}\\
&\quad + \Big(h^z + H^z - z\frac{\partial H^y}{\partial y} + y\frac{\partial H^y}{\partial z}\Big)\frac{\partial}{\partial h^y} - \Big(h^y + H^y - y\frac{\partial H^z}{\partial z} + z\frac{\partial H^z}{\partial y}\Big)\frac{\partial}{\partial h^z},\\
X_{12} &= t\frac{\partial}{\partial t} - v^x\frac{\partial}{\partial v^x} - v^y\frac{\partial}{\partial v^y} - v^z\frac{\partial}{\partial v^z} + 2\varrho\frac{\partial}{\partial \varrho},\\
X_{13} &= (h^x + H^x)\frac{\partial}{\partial h^x} + (h^y + H^y)\frac{\partial}{\partial h^y} + (h^z + H^z)\frac{\partial}{\partial h^z} + 2\varrho\frac{\partial}{\partial \varrho} + 2p\frac{\partial}{\partial p}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Auch hier erhält man die entsprechende Lie-Algebra für die Strömung ohne äußeres Magnetfeld, indem man in (8) $\boldsymbol{H}_{ex} = 0$ setzt.

Die lokalen einparametrigen Transformationsgruppen, die zu den Basisvektoren (8) der Lie-Algebra gehören, sind:

$$C_1 \neq 0: \quad \tilde{x} = x + \varepsilon C_1, \quad \begin{aligned} \widetilde{h^x} &= h^x + H^x(x,y,z) - H^x(x+\varepsilon C_1, y, z), \\ \widetilde{h^y} &= h^y + H^y(x,y,z) - H^y(x+\varepsilon C_1, y, z), \\ \widetilde{h^z} &= h^z + H^z(x,y,z) - H^z(x+\varepsilon C_1, y, z) \end{aligned}$$

(Translation in x-Richtung für $\boldsymbol{H}_{ex} = 0$).

Für $C_2 \neq 0$ und $C_3 \neq 0$ ergeben sich analoge Transformationen (Translationen in y- bzw. z-Richtung für $\boldsymbol{H}_{ex} = 0$).

$$C_4 \neq 0: \quad \tilde{t} = t + \varepsilon C_4 \quad \text{(Zeitverschiebung)}$$

$$C_5 \neq 0: \quad \begin{aligned} \tilde{x} &= x + \varepsilon C_5 t, & \widetilde{h^x} &= h^x + H^x(x,y,z) - H^x(x+\varepsilon C_5 t, y, z), \\ \widetilde{v^x} &= v^x + \varepsilon C_5, & \widetilde{h^y} &= h^y + H^y(x,y,z) - H^y(x+\varepsilon C_5 t, y, z), \\ & & \widetilde{h^z} &= h^z + H^z(x,y,z) - H^z(x+\varepsilon C_5 t, y, z) \end{aligned}$$

(Galilei-boost für $\boldsymbol{H}_{ex} = 0$).

Für $C_6 \neq 0$ und $C_7 \neq 0$ ergeben sich analoge Transformationen.

$$C_8 \neq 0: \quad \begin{aligned} & \tilde{x} = x e^{C_8 \varepsilon}, \quad \tilde{y} = y e^{C_8 \varepsilon}, \quad \tilde{z} = z e^{C_8 \varepsilon}, \\ & \widetilde{v^x} = v^x e^{C_8 \varepsilon}, \quad \widetilde{v^y} = v^y e^{C_8 \varepsilon}, \quad \widetilde{v^z} = v^z e^{C_8 \varepsilon}, \quad \tilde{\varrho} = \varrho e^{-2 C_8 \varepsilon}, \\ & \widetilde{h^x} = h^x + H^x(x,y,z) - H^x(x e^{C_8 \varepsilon}, y e^{C_8 \varepsilon}, z e^{C_8 \varepsilon}), \\ & \widetilde{h^y} = h^y + H^y(x,y,z) - H^y(x e^{C_8 \varepsilon}, y e^{C_8 \varepsilon}, z e^{C_8 \varepsilon}), \\ & \widetilde{h^z} = h^z + H^z(x,y,z) - H^z(x e^{C_8 \varepsilon}, y e^{C_8 \varepsilon}, z e^{C_8 \varepsilon}) \end{aligned}$$

(Streckung für $x, y, z, v^x, v^y, v^z, \varrho$).

$$C_9 \neq 0: \quad \begin{aligned} & \tilde{x} = y \sin(C_9 \varepsilon) + x \cos(C_9 \varepsilon), \quad \tilde{y} = y \cos(C_9 \varepsilon) - x \sin(C_9 \varepsilon), \\ & \widetilde{v^x} = v^y \sin(C_9 \varepsilon) + v^x \cos(C_9 \varepsilon), \quad \widetilde{v^y} = v^y \cos(C_9 \varepsilon) - v^x \sin(C_9 \varepsilon), \\ & \widetilde{h^x} = (h^x + H^x(x,y,z)) \cos(C_9 \varepsilon) + (h^y + H^y(x,y,z)) \sin(C_9 \varepsilon) - \\ & \qquad - H^x(x \cos(C_9 \varepsilon) + y \sin(C_9 \varepsilon), -x \sin(C_9 \varepsilon) + y \cos(C_9 \varepsilon), z), \\ & \widetilde{h^y} = (h^y + H^y(x,y,z)) \cos(C_9 \varepsilon) - (h^x + H^x(x,y,z)) \sin(C_9 \varepsilon) - \\ & \qquad - H^y(x \cos(C_9 \varepsilon) + y \sin(C_9 \varepsilon), -x \sin(C_9 \varepsilon) + y \cos(C_9 \varepsilon), z), \\ & \widetilde{h^z} = h^z + H^z(x,y,z) - H^z(x \cos(C_9 \varepsilon) + y \sin(C_9 \varepsilon), -x \sin(C_9 \varepsilon) + y \cos(C_9 \varepsilon), z) \end{aligned}$$

(Rotation für $\boldsymbol{H}_{ex} = 0$).

Für $C_{10} \neq 0$ und $C_{11} \neq 0$ ergeben sich analoge Transformationen (Rotationen in der x-z- bzw. y-z-Ebene).

$$C_{12} \neq 0: \quad \begin{aligned} & \tilde{t} = t e^{C_{12} \varepsilon}, \quad \widetilde{v^x} = v^x e^{-C_{12} \varepsilon}, \quad \widetilde{v^y} = v^y e^{-C_{12} \varepsilon}, \quad \widetilde{v^z} = v^z e^{-C_{12} \varepsilon}, \\ & \tilde{\varrho} = \varrho e^{2 C_{12} \varepsilon} \quad \text{(Streckung für } t, v^x, v^y, v^z, \varrho\text{)}. \end{aligned}$$

$$C_{13} \neq 0: \quad \begin{aligned} & \widetilde{h^x} = -H^x(x,y,z) + (h^x + H^x(x,y,z)) e^{C_{13} \varepsilon}, \\ & \widetilde{h^y} = -H^y(x,y,z) + (h^y + H^y(x,y,z)) e^{C_{13} \varepsilon}, \\ & \widetilde{h^z} = -H^z(x,y,z) + (h^z + H^z(x,y,z)) e^{C_{13} \varepsilon}, \\ & \tilde{\varrho} = \varrho e^{2 C_{13} \varepsilon}, \quad \tilde{p} = p e^{2 C_{13} \varepsilon} \end{aligned}$$

(Streckung für $h^x + H^x, h^y + H^y, h^z + H^z, \varrho, p$).

4. Schlußbemerkungen

Für eine zwei- und eine dreidimensionale isentrope Plasmaströmung sind die Lie-Algebren der infinitesimalen Symmetrien und die Lie-Symmetriegruppen der nichtstationären kompressiblen idealen MHD-Gleichungen berechnet worden. Dabei stellte sich heraus, daß beim Anlegen eines äußeren, beliebig ortsabhängigen Magnetfeldes die Dimension der Lie-Algebra nicht verändert wird.

Es ist interessant, die infinitesimalen Elemente (3) und die Lie-Algebra (5) für die ebene Strömung mit einem beliebig orientierten internen Magnetfeld und $\boldsymbol{H}_{ex}=0$ mit den entsprechenden Ergebnissen für eine ebene Strömung mit einem Magnetfeld senkrecht zur Strömung [7] zu vergleichen (in [7] wurde die z-Komponente h^z des Magnetfeldes h genannt, und es gab keine infinitesimalen Elemente η^{h^x}, η^{h^y}, da $\boldsymbol{H}$ parallel zu $\boldsymbol{e}_z$ war. Die infinitesimalen Elemente enthielten zehn freie Parameter $C_1,\ldots,C_{10}$ und eine freie Funktion $f(h^z/\varrho, p/\varrho^2)$.) Im Fall $\gamma\neq 2$ ergeben sich für den Fall des senkrechten Magnetfeldes und für den Fall des beliebig orientierten Magnetfeldes dieselben infinitesimalen Elemente ξ^x, ξ^y, ξ^t, η^{v^x}, η^{v^y}, η^{h^z}, η^ϱ und η^p, während sie für $\gamma=2$ nur dann übereinstimmen, wenn $C_{10}=0$ und $f(h^z/\varrho, p/\varrho^2)=-C_{11}h^z/\varrho$. Entsprechend dazu sind die Basisvektoren $X_1,\ldots,X_9$ der Lie-Algebren für beide Strömungen identisch, wenn $h^x=h^y=0$ gilt, aber den Vektor X_{10} der Strömung mit senkrechtem Magnetfeld gibt es für beliebig orientiertes Magnetfeld nicht, und der Vektor $X(f)$ wird zu X_{11} nur, wenn $f(h^z/\varrho, p/\varrho^2)=-C_{11}h^z/\varrho$. Für $\gamma=2$ erhält man also eine 10-dimensionale Lie-Algebra im Fall einer Strömung mit beliebig orientiertem Magnetfeld anstelle einer unendlichdimensionalen im Fall einer Strömung mit senkrechtem Magnetfeld. Obwohl das senkrechte Magnetfeld ein Spezialfall eines beliebig orientierten Magnetfeldes ist, kann man die zugehörige Lie-Algebra nicht aus der Lie-Algebra für das beliebig orientierte Magnetfeld erhalten, indem man $h^x=h^y=0$ setzt.

Wenn man jedoch Ähnlichkeitsvariable und neue abhängige Variable sucht, um die Gleichungen (1) auf ein partielles Differentialgleichungssystem mit nur zwei unabhängigen Variablen zu reduzieren, können trotzdem die Ergebnisse in [7] leicht auf den Fall des beliebig orientierten Magnetfeldes für $\gamma\neq 2$ verallgemeinert werden: Da η^{h^x} und η^{h^y} nur von h^x und h^y abhängen und kein anderes infinitesimales Element von h^x oder h^y abhängt, kann die ursprüngliche Klassifikation benutzt werden. Die Ähnlichkeitsvariablen λ,μ und die neuen abhängigen Variablen $U(\lambda,\mu)$, $V(\lambda,\mu)$, $H(\lambda,\mu)$, $R(\lambda,\mu)$, $P(\lambda,\mu)$ bleiben unverändert. Die beiden anderen abhängigen Variablen $H^x(\lambda,\mu)$ und $H^y(\lambda,\mu)$ können leicht als ‚Integrationskonstanten' eines der drei Systeme charakteristischer Gleichungen

$$\frac{dx}{\xi^x}=\frac{dh^x}{\eta^{h^x}}=\frac{dh^y}{\eta^{h^y}},\quad \frac{dy}{\xi^y}=\frac{dh^x}{\eta^{h^x}}=\frac{dh^y}{\eta^{h^y}},\quad \frac{dt}{\xi^t}=\frac{dh^x}{\eta^{h^x}}=\frac{dh^y}{\eta^{h^y}}$$

mit den infinitesimalen Elementen (3) berechnet werden.

Danksagung

Ich danke Professor E. W. Richter für viele hilfreiche Diskussionen.

Literatur

[1] Hughes, W. F. und Young, F. J., The Electrodynamic of Fluids. Wiley, New York 1966.
[2] Bluman, G. W. und Cole, J. D., Similarity Methods for Differential Equations. Springer, Berlin 1974.
[3] Ovsiannikov, L. V., Group Analysis of Differential Equations. Academic Press, New York 1982.
[4] Olver, P. J., Applications of Lie Groups to Differential Equations. Springer, Berlin 1986.
[5] Nucci, M. C., Group Analysis of MHD-Equations. Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **33** (1984), 21–34.
[6] Groß, J., Invariante Lösungen der eindimensionalen nichtstationären realen MHD-Gleichungen. Dissertation, Technische Universität Braunschweig 1983.
[7] Fuchs, J. C. und Richter, E. W., Similarity solutions for the two-dimensional non-stationary ideal MHD equations. J. Phys. A: Math. Gen. **20** (1987), 3135–3157.